



复旦大学高等代数课程建设的经验与体会

谢启鸿

福建莆田 2018年11月10日

整体目录



高代教材



学习指导书



高代博客



在线课程



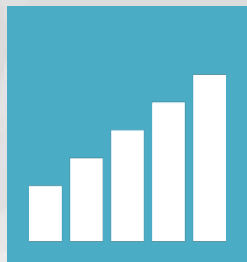
高代教学



考试命题



教学研究



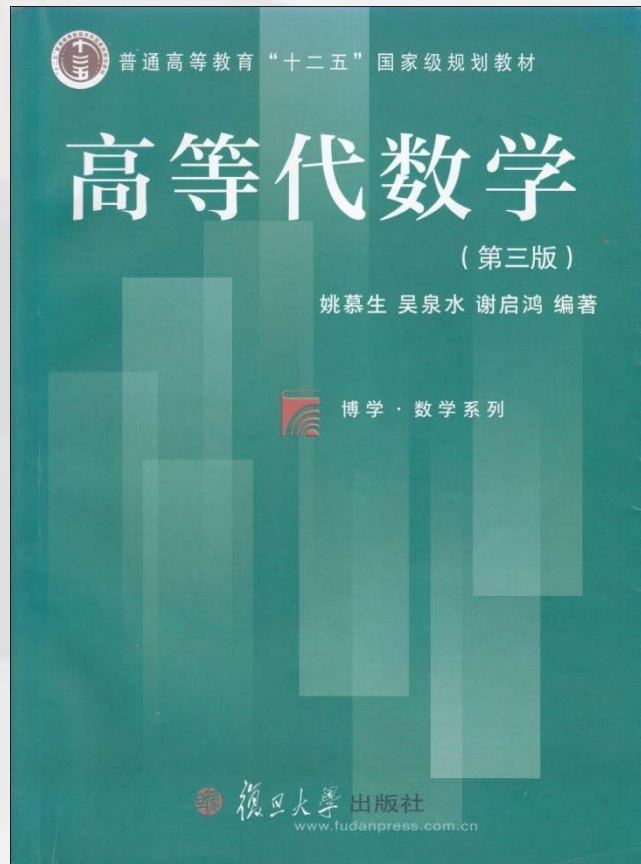
教学效果

一、高代教材

- ① 从1993年开始使用，25年间数次修订。
- ② 以线性空间为主线，注重代数与几何之间的相互转换和有机统一。
- ③ 以三大问题为切入点，注重启发式教学和学生能力的培养。
- ④ 在夯实代数基础的同时，服务后续的专业课程。

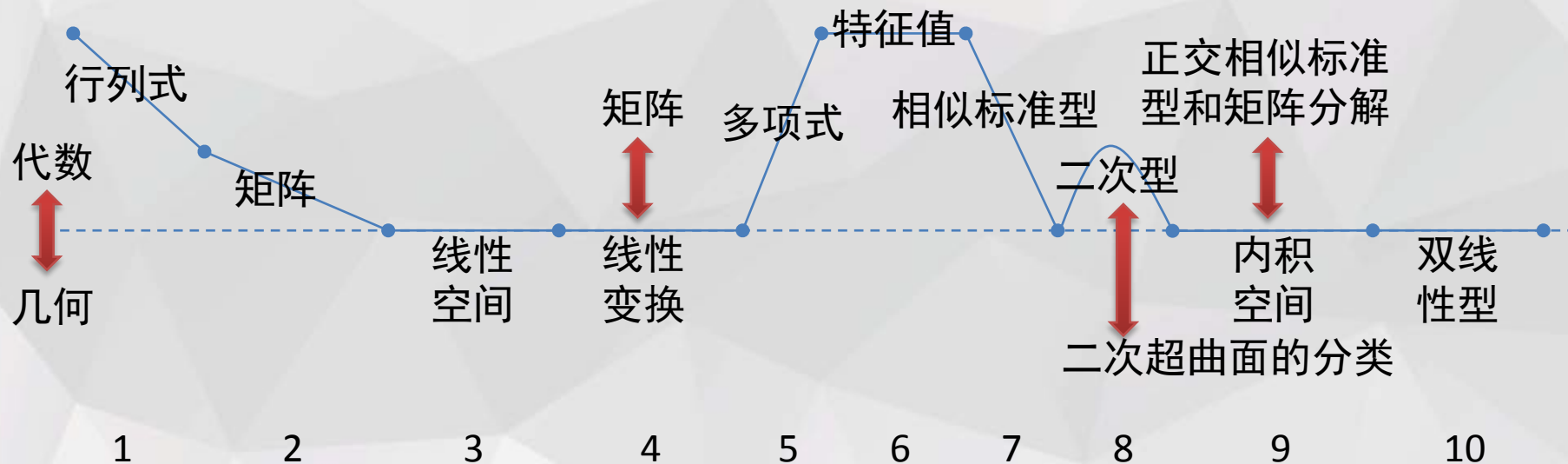
1.1 高代教材历时25年数次修订

- 1993年09月—1999年04月：试用版
- 1999年05月—2003年05月：第一版
- 2003年06月—2008年05月：
 博学·数学系列第一版
- 2008年06月—2014年09月：
 博学·数学系列第二版
- 2014年10月—至今：
 博学·数学系列第三版



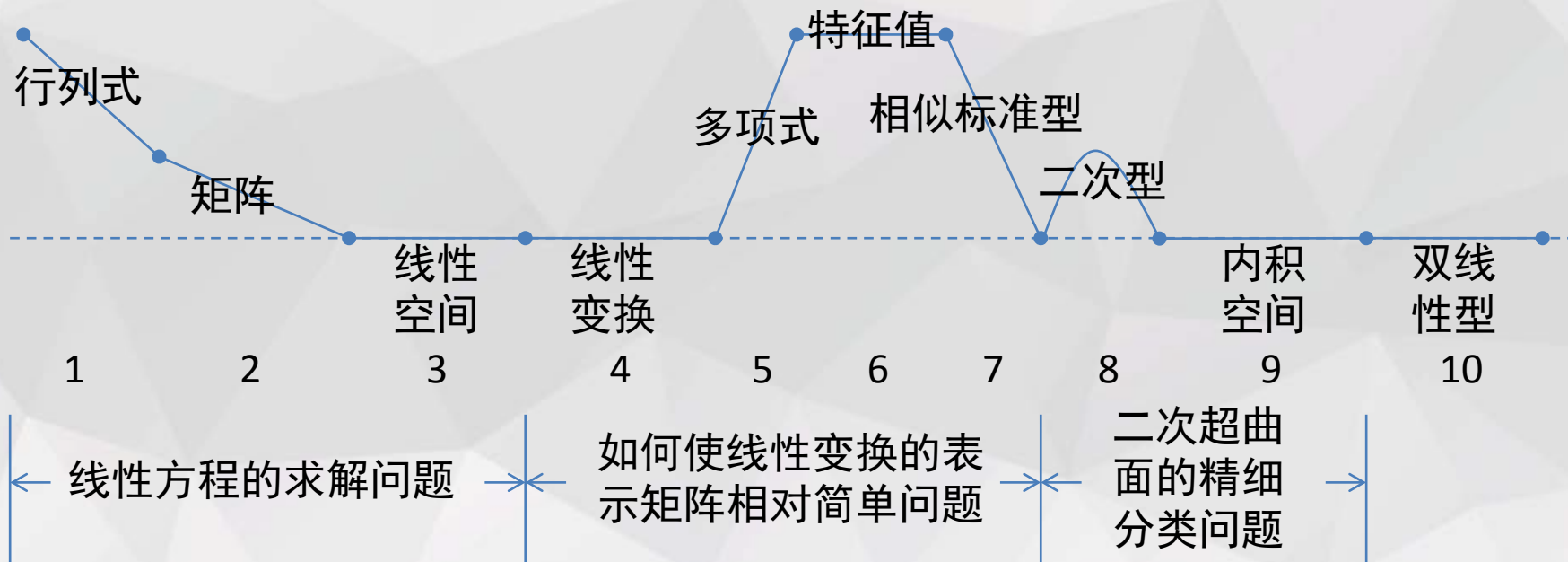


1.2 高代教材以线性空间为主线



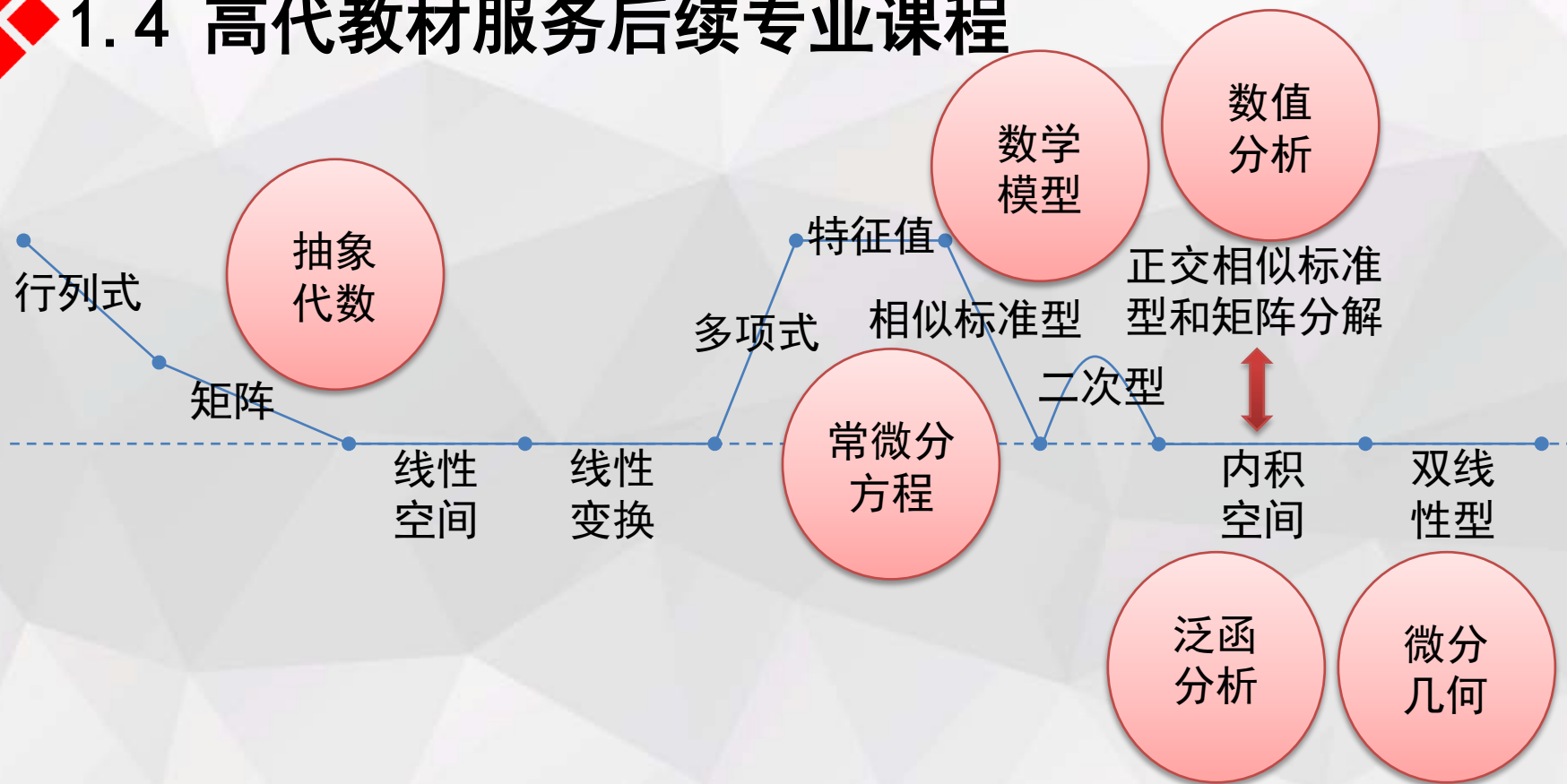


1.3 高代教材以三大问题为切入点





1.4 高代教材服务后续专业课程



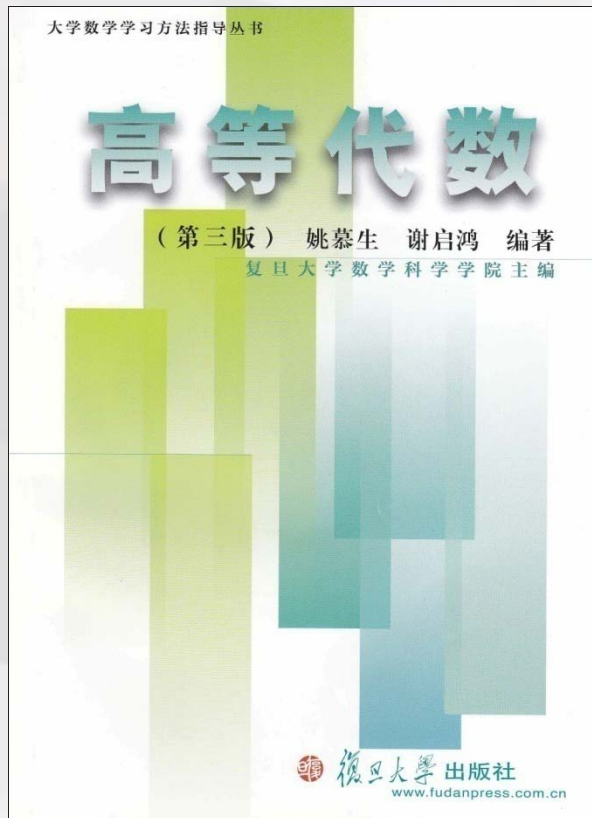
二、高代学习指导书

- ① 从2002年开始使用，16年间三次修订。
- ② 与教材无缝对接，每章分基本概念、例题分析和基础训练三部分，例题分析部分按照方法和技巧进行分类。
- ③ 注重归纳总结和一题多解。
- ④ 例题选材丰富，经典性与新颖性并重，融入了最新的教学成果。

2.1 学习指导书历时16年三次修订

大学数学学习方法指导丛书

- 2002年08月—2007年09月：第一版
- 2007年10月—2015年08月：第二版
- 2015年09月—至今：第三版





2.2、学习指导书与教材无缝对接

- ① 章标题与教材相同，每章分基本概念、例题分析和基础训练三部分。
- ② 基本概念部分回顾本章重要定义和定理。
- ③ 例题分析部分按照方法和技巧进行主题分类，每个主题精讲典型例题。
- ④ 基础训练部分提供练习题，包括选择题、填空题和解答题。

2.3、学习指导书注重归纳总结和一题多解

归纳总结

行列式求值的方法，矩阵的迹，摄动法，伴随矩阵的性质，矩阵秩的证明方法，代数与几何的转换，幂等变换，互素多项式的应用，矩阵可对角化的判定，交换性与多项式表示，正定、半正定矩阵的性质，矩阵相抵、相似、合同、正交相似标准型的应用，同时上三角、对角化、标准化的应用，复正规阵和实正规阵的性质，矩阵分解的应用等。

一题多解

学习指导书中100余道例题，随着章节的深入，不断给出多种证法或解法，揭示了各类知识点之间的深层次联系。

例 第2章解答题15：(1) 基础矩阵，(2) 伴随算子，(3) 奇异值分解。



2.4、学习指导书例题选材丰富

- ① 精讲典型例题700余道，训练题450余道。
- ② 收录部分兄弟院校考研试题和全国大学生数学竞赛试题。
- ③ 收录部分复旦大学期中、期末考试压轴大题和高代每周一题。
- ④ 融入多年积累的教学体会和最新发表的教学成果。

三、高代博客

- ① 从2014年2月开始创建，现有博文147篇，包含大量原创性高代学习资料。
- ② 博客中最具特色栏目一高代每周题。



谢启鸿高等代数官方博客

博客网 圈子 首页 新随笔 联系 管理 订阅

随笔- 147 文章- 0 评论- 147

昵称: torsor
园龄: 4年8个月
粉丝: 146
关注: 0
[+加关注](#)

2018年10月

日	一	二	三	四	五	六
30	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	1	2	3
4	5	6	7	8	9	10

❤ 搜索

❤ 常用链接

我的链接

2018年7月10日

复旦大学2017--2018学年第二学期高等代数II期末考试情况简析

摘要: 一、期末考试成绩班级前十名 张菲诺(95)、刘宇其(95)、魏一鸣(93)、郭宇城(92)、程梓豪(91)、葛珈玮(90)、汪子怡(90)、余张伟(90)、张昱星(89)、朱柏青(89) 二、总成绩计算方法 平时成绩根据交作业的次数决定, 本学期共交作业14次, 10次以上 (包括10次) 100分, 少一次 [阅读全文](#)

posted @ 2018-07-10 12:48 torsor 阅读(1812) 评论(2) 编辑

复旦大学2017--2018学年第二学期 (17级) 高等代数II期末考试第六大题解答

摘要: 六、(本题10分) 设 A 为 n 阶幂零阵 (即存在正整数 k , 使得 $A^k = 0$), 证明: e^A 与 $I_n + A$ 相似. 证明: 由 A 是幂零阵可知 A 的特征值全为零. 设 P 为非异阵, 使得 $P^{-1}AP = J = \text{diag}(J_1, \dots, J_r)$ ([阅读全文](#))

posted @ 2018-07-10 07:01 torsor 阅读(580) 评论(0) 编辑

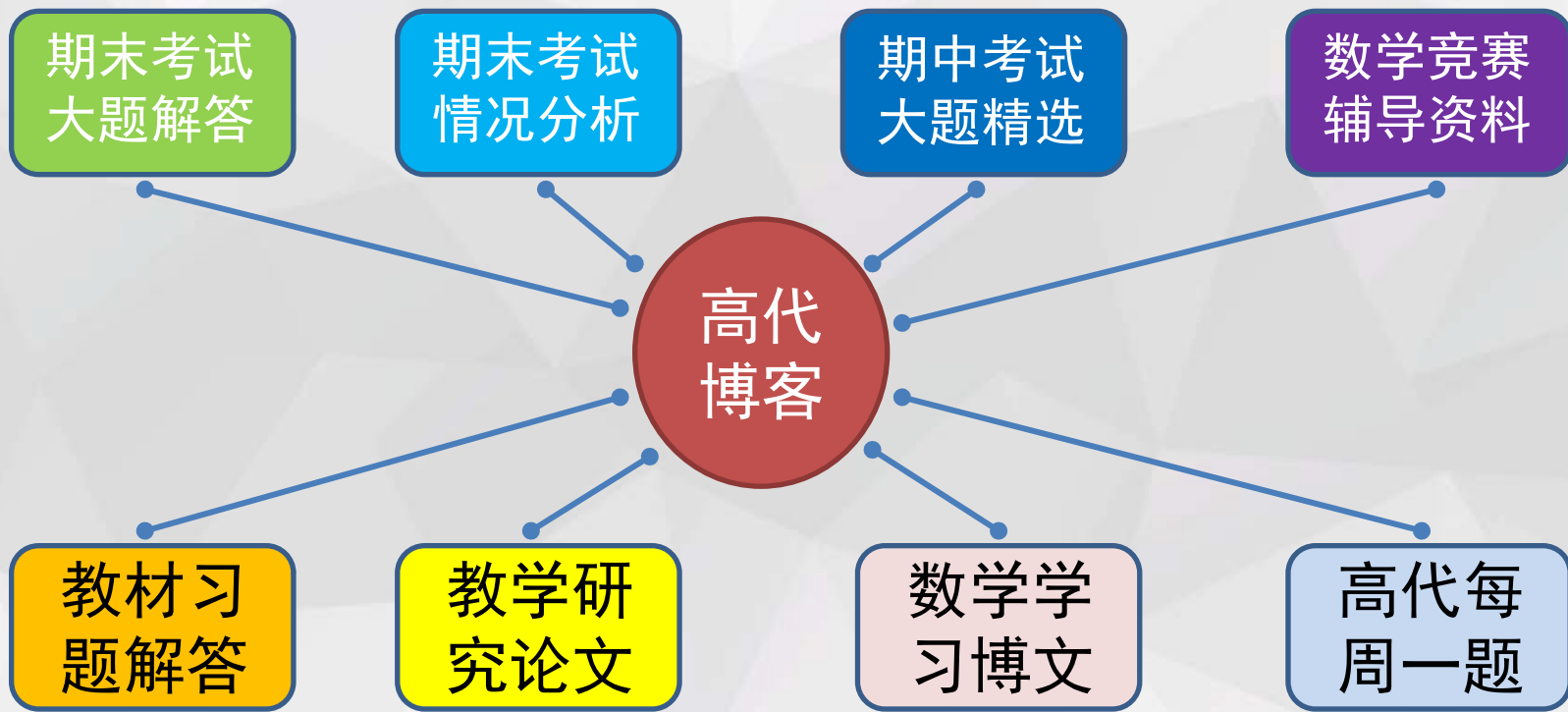
2018年7月9日

复旦大学2017--2018学年第二学期 (17级) 高等代数II期末考试第七大题解答

摘要: 七、(本题10分) 设 $A_1, A_2, \dots, A_m$ 为 n 阶实对称阵, 其中 A_1 为正定阵, 并且对任意的 $2 \leq i < j \leq m$, $A_i A_j^{-1} A_j$ 都是对称阵. 证明: 存在非异实方阵 C , 使得 $CA_1 C^{-1} = I_n$ ([阅读全文](#))

posted @ 2018-07-09 20:37 torsor 阅读(439) 评论(0) 编辑

3.1、高代博客包含大量原创性学习资料





3.2、特色栏目—高代每周题

- ① 从2014年2月开始推出, 历经复旦数院13级-17级共5个年级。
- ② 每周一题中包含大量原创性高代习题。
- ③ 每周通过博客和微信发布, 学生提交纸质或图片解答。

复旦高等代数 I (17级) 每周一题

本学期将继续进行高等代数每周题的活动。计划从第二数学周开始, 到第十六数学周为止(根据法定节假日安排, 中间个别周会适当顺延)。每周的周末将公布1-2道思考题, 供大家思考和解答。每题一题通过“复旦高等代数官方微博”(以博文的形式)和“高等代数在线课程17级课程”(以课程页面的形式)这两个渠道同时发布, 并附过17级的短信验证码及封面给大家。有兴趣的同学可以将每周一题的解答写在纸上, 在课堂上交给董仁涛老师, 或两两拍照解答拍成图片, 作为附件上传到该每周题对应的课程页面中作为解答。董老师或研究生助教会对每周题的解答进行批改和评价, 并将优秀解答标注出来推荐给全班同学。

复旦高等代数 I (15级) 思考题

1、证明: 第三类分块初等变换是若干个第三类初等变换的复合。特别地, 第三类的值。

2、设 $n (n \geq 2)$ 阶方阵 $A = (a_{ij}(x))$, 其中每个元素 $a_{ij}(x)$ 都是关于未知数 x^k 整除 A 的所有代数余子式 A_{ij} , 证明: x^{k+1} 整除 A 的行列式 $|A|$ 。

提示 考虑 A 的伴随矩阵 A^* 的行列式。另外, 本题还可以推广为: 若 k 是正可约多项式, 满足 $p(x)^k$ 整除 A 的所有

复旦高等代数 II (16级) 每周一题

每周一题的说明

$$3、设 M = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 + 1 \\ a_2 a_1 + 1 & a_2^2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n a_1 + 1 & a_n a_2 + 1 \end{pmatrix}$$

- 一、本学期间高代II的每周一题面向16级的同学, 将定期更新(一般每周的周末公布下一周的题目);
- 二、欢迎16级的同学通过微信或书面方式提供解答图片或纸质文件给我, 优秀的解答可以分享给大家;
- 三、请大家先独立思考和解答每周题, 实在做不出的情况下, 可以点击[参考答案](#)进行学习。

提示 参考复旦高代教材第102页的例2.4

4、设 A 是 $m \times n$ 实矩阵, 试用秩的子 $r(A'A) = r(AA')$ 求 $r(A)$ 。

提示 这是复旦高代教材第179页的复习求解理论来做的。

5、设 A, B 都是 n 阶方阵, 约定 $A^0 = I_n$ 。

(1) 若 k 是非负整数, 使得 $r(A^k) = r(A)$ 。

(2) 记 $s(A) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid r(A^k) = r(A)\}$ 的铁保持稳定了, 这个最终稳定的铁记为 $s(A)$ 并且是 0 和 n 之间的某个自然数。

(3) 证明: $r_\infty(AB) = r_\infty(BA)$ 。

(4) 证明: $|s(AB) - s(BA)| \leq 1$, 并且

提示 前面两题参考复旦高代白皮书例4. $(AB)^{i+1} = A(BA)^i B$ 和 $(BA)^{i+1} = B(AB)^i A$ 。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & \cdots & 3n-2 \\ 1 & 5 & 9 & \cdots & 4n-3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

[提示: 若对任意的 n 是偶数。

$9C = CB$, 求 C 。

$9C = CB$, 求 C 。

$$[问题2017S01] \text{ 设 } A \text{ 是 } n \text{ 阶对称阵, 即 } A^T = I_n, \text{ 证明: } n - \text{tr}(A) \text{ 为偶数, 并且 } \text{tr}(A) = n \text{ 的充要条件是 } A = I_n.$$

$$[问题2017S02] \text{ 设方阵 } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a & 0 \\ a-2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 可对角化. 求 } a \text{ 的值.}$$

[问题2017S03] 设 $A_1, A_2, \dots, A_m \in M_n(\mathbb{K})$, $g(x) \in \mathbb{K}[x]$, 使得 $g(A_1), g(A_2), \dots, g(A_m)$ 都是非异阵, 证明: 存在 $h(x) \in \mathbb{K}[x]$, 使得 $g(A_i)^{-1} = h(A_i)$ 对所有的 $1 \leq i \leq m$ 都成立。

注: 请用两种方法进行证明上述问题。

[问题2017S04] 设 $A = (a_{ij})$ 为 n 阶复矩阵, 证明: 存在正数 δ , 使得对任意的 $s \in (0, \delta)$, 下列矩阵均可对角化:

$$A(s) = \begin{pmatrix} a_{11} + s & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} + s^2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} + s^n \end{pmatrix}.$$

注: 本题由楼卫红教授给出, 曾作为15级高代II思考题第5题。

[问题2017S05] 设 A 为 n 阶方阵, 证明: 若下列条件之一成立, 则矩阵方程 $AX + XA = X$ 只有零解:

- (1) A 为幂零阵, 即存在正整数 m , 使得 $A^m = 0$;
- (2) A 的所有元素都为 1;
- (3) A 的特征值全为偶数;
- (4) A 的所有特征值实部的绝对值都小于 $\frac{1}{2}$ 。

四、高代在线课程

- ① 从2016年3月开始在易班优课平台推出高代在线课程，一学年，共114学时。
- ② 在线课程解决了转专业学生面临的高代教学难题。

The screenshot displays the 'Yiban Academy' (易班学院) website interface. At the top, there's a navigation bar with '易班学院' (Yiban Academy), '首页' (Home), '易班原创' (Yiban Original), '学习课程' (Learning Courses), and '移动学习' (Mobile Learning). Below this, the main content area is titled '高等代数学' (Higher Algebra) by '谢启鸿' (Xie Qihong) from '复旦大学' (Fudan University). The course description mentions it's a foundational course for university students, covering topics like linear transformations, eigenvalues, and quadratic forms. It also shows the number of students (10580) and the course ID (FDDNFDDX.G174320160505). A '报名学习' (Enroll and Study) button is prominent. On the right, there's a section for '机构介绍' (Institution Introduction) featuring Fudan University's logo and a brief history. Below that, the '讲师介绍' (Instructor Introduction) section features a photo of the instructor, Xie Qihong, and his credentials as a professor and Ph.D. supervisor at Fudan University.

易班学院 首页 易班原创 学习课程 移动学习 登录 | 注册

全部课程 > 理工 > 课程详情

谢启鸿
复旦大学

高等代数学

课程机构：复旦大学
课程介绍：高等代数学是大学数学系最重要的基础课之一，面向全体一年级本科生，按课时分块讲授行列式、矩阵、线性方程组求解、线性空间和线性变换、多元函数、特征值、相似标准型、二次型、内积空间等知识要点，为学习后续专业课程提供必要的代数基础。

报名人数：10580 课程代码：FDDNFDDX.G174320160505

报名学习

课程列表

- 高等代数学
 - 1.1二阶行列式
 - 1.2三阶行列式
 - 1.3 n 阶行列式（上）
 - 1.3 n 阶行列式（中）
 - 1.3 n 阶行列式（下）
 - 1.4行列式的展开和转置
 - 1.5行列式的计算（上）
 - 1.5行列式的计算（下）
 - 1.6行列式的等价定义（上）

机构介绍

复旦大学
复旦大学创建于1905年，原名复旦公学，是中国大陆举办的第一所高等院校，创始人是中国近代知名教育家马相伯。校名“复旦”二字选自《尚书大传·虞夏传》中“日月为东，复旦”的语句，意在自强不息，寄托当时中国知识分子自主办学、教育报国的愿望。

讲师介绍

谢启鸿
教授
复旦大学数学科学学院教授、博士生导师。1992年本科毕业于复旦大学数学系，后进入复旦大学数学研究所攻读硕士学位，1999年经数学研究所推荐留校任教。

显示全部

4.1、转专业学生面临的高代教学难题

数学学院



其他院系



虽然转入了数院，但
大一没学过高代，大
二的专业课跟不上！
另外，高代课初选免
听，基础很不扎实！

好想转
入数院
学习，
如果大
一能学
高代就
好了！

4.2、高代在线课程服务转专业学生

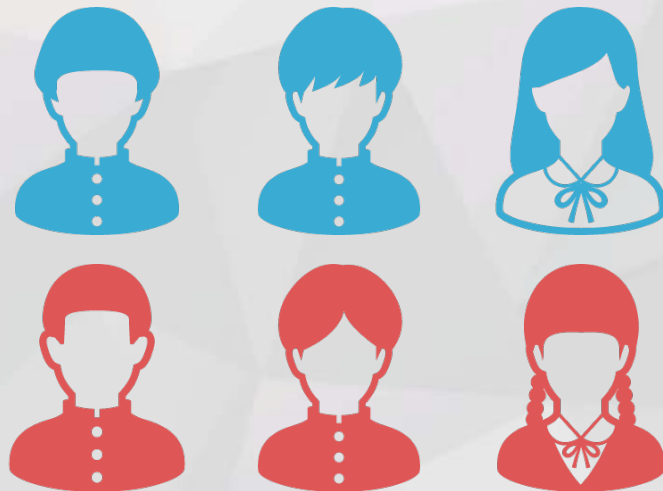
高代通常课程



高代通常课程以板书教学为主体，以在线课程教学为辅助，供数院学生自主学习和回看学习。

平行
设置

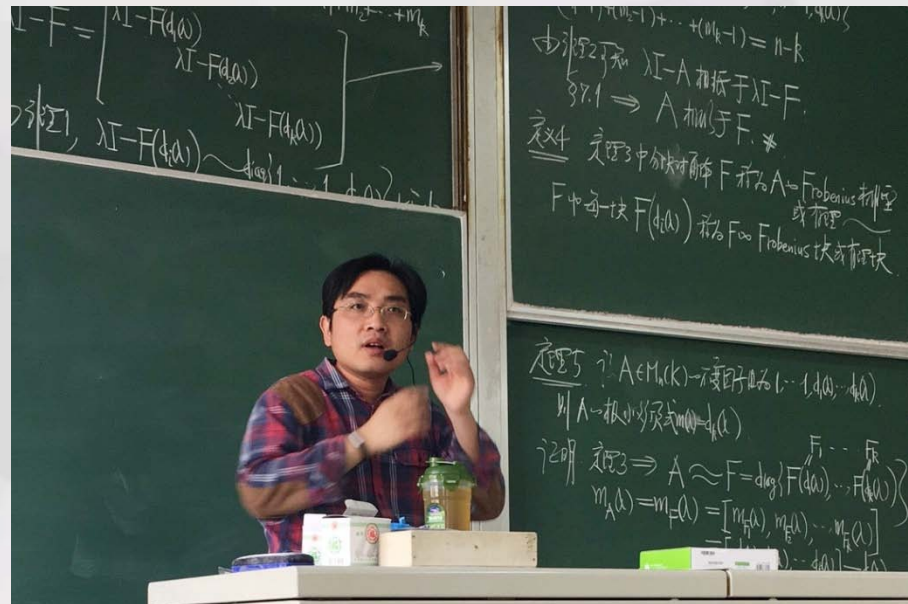
高代在线课程



高代在线课程面向非数学专业学生，以线上教学为主体，以线下习题课教学为辅助。强制转专业学生加入在线学习。

五、高代教学

- ① 因材施教，注重教育的公平性和普遍性。
- ② 着重培养学生的动手、运用和自学能力。
- ③ 利用慕课、博客和微信等新媒介增进师生之间的交流和互动。



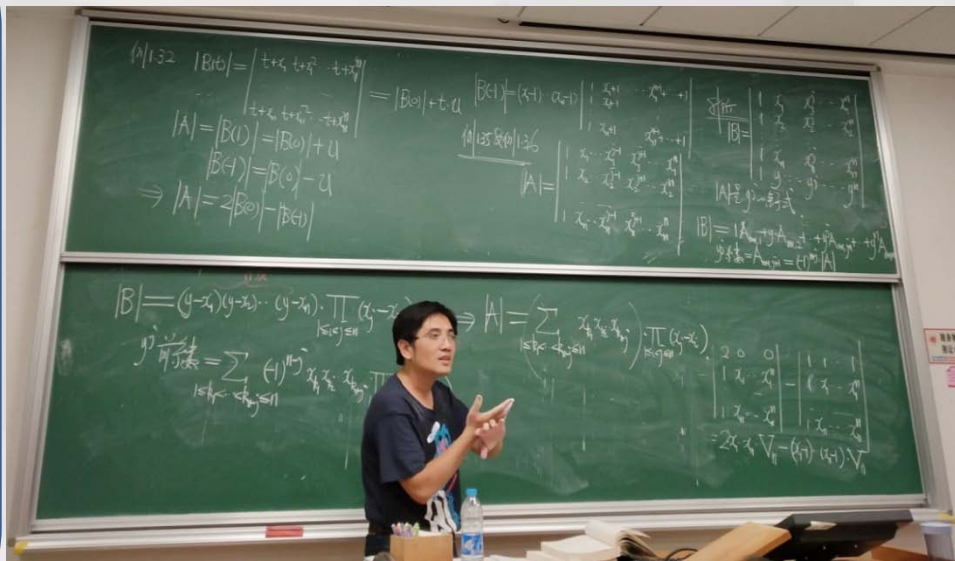


5.1、课堂教学因材施教

- ① 教学目标是课堂教学要让后90%的学生完全听懂。注重教育的公平性和普遍性。始终以学生是否满意作为衡量自己教学是否合格的唯一标准。
- ② 为前10%的拔尖学生推出高代每周题。
- ③ 着重强化高代与后续专业课之间的有机联系，帮助学生建立高代完整的知识体系及其应用框架。

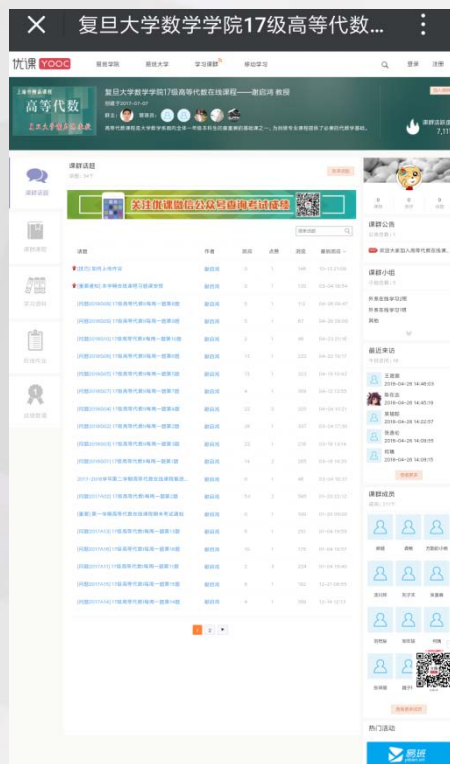
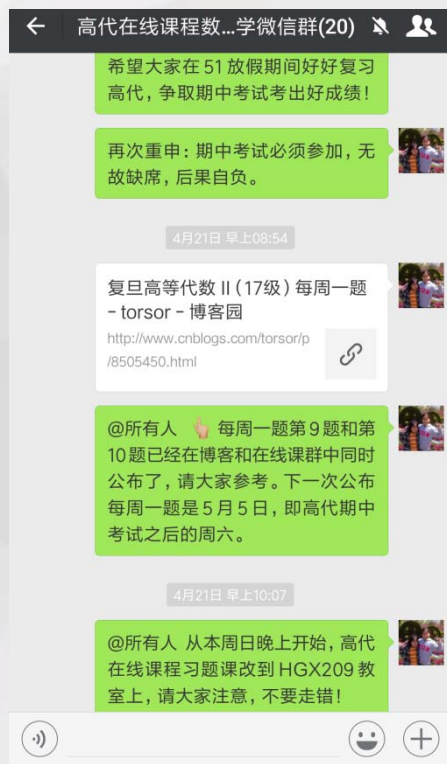
5.2、习题课教学着重培养学生的能力

- ① 以学习指导书为抓手，有效提升习题课教学质量，培养学生的解题、运用和自学能力。
- ② 以每周一题为推动力，利用难题征解和一题多解激发学生的学习动力和创新潜力。



5.3、利用三种新媒体介全面增进师生互动

- ① 2014. 2 → 高代博客
- ② 2014. 9 → 高代微信群
- ③ 2016. 3 → 高代慕课
- ④ 充分利用上述三种新媒体介激发“95后”大学生的学习兴趣，全面增进师生之间的交流与互动。



六、考试命题

- ① 合理设计考卷，使得题型丰富，难易度适中，考察点全面，利于不同层次的学生发挥，能较好地反馈学习成果。
- ② 坚持自主创新命题，利用“巧设参数、自然延伸、适当推广、逆向思维、直接应用，一题多解”六种方法进行命题。
- ③ 坚持发布期末压轴大题解答和考试情况分析，促进学生自评与自省。

❖ 6.1、合理设计考卷利于学生发挥

考卷设计

一、选择题 $8 \times 2 = 16$ 分

二、填空题 $8 \times 3 = 24$ 分

三&四&五、计算大题 $3 \times 10 = 30$ 分

六、简单证明题 $1 \times 10 = 10$ 分

七&八、压轴证明题 $2 \times 10 = 20$ 分

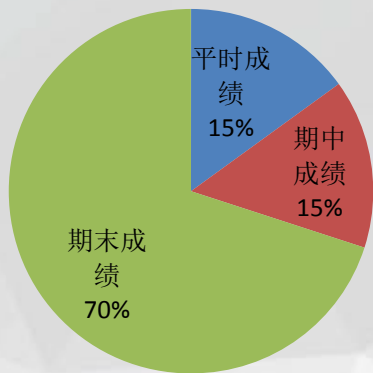
基础
部分
80分

提高
部分

6.1、合理设计考卷利于学生发挥

考察效果

总评成绩



- ① 根据近五年成绩统计，班级总评成绩和等地成绩均呈正态分布。
- ② A类占30%，总评成绩基本上以80分划线。
- ③ B类占45%，总评成绩基本上以70分划线。
- ④ C类占15%，总评成绩基本上以60分划线。

6.2、坚持自主创新命题及六种命题方法

方法一：巧设参数

在通常计算题中巧设参数，使得计算量不增加，但知识点考察更全面。

例 1 求解下列线性方程组，其中 a, b 为任意实数.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 3ax_4 = b + 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + (a + 1)x_4 = b, \\ 7x_1 + 9x_2 + 4x_3 + ax_4 = 2b - 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 12x_3 + (4a + 1)x_4 = 3b - 2. \end{cases}$$

6.2、坚持自主创新命题及六种命题方法

方法一：巧设参数

在通常计算题中巧设参数，使得计算量不增加，但知识点考察更全面。

例 2 求方阵的 Jordan 标准型，其中 a, b 为任意实数.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a+2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & b+4 & 1 \end{pmatrix}$$

6.2、坚持自主创新命题及六种命题方法

方法二：自然延伸

在教材习题相同的条件下，自然延伸某些性质和结论作为考题。

例 2 (2011 级高等代数 II 期末考试第七大题) 设 A 为 n 阶复方阵, $B = \begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^2 & A \end{pmatrix}$ 为 $2n$ 阶复方阵. 证明: 若 A 可对角化, 则 B 也可对角化.

评注 教材 [1] 复习题六的第 13 题是在相同的假设下, 由 A 的全体特征值求 B 的全体特征值, 而这道试题自然地延伸为由 A 的可对角化证明 B 的可对角化.

6.2、坚持自主创新命题及六种命题方法

方法二：自然延伸

在教材习题相同的条件下，自然延伸某些性质和结论作为考题。

例 3 (2015 级高等代数 II 期末考试第七大题) 设 A, B, C 分别为 $m \times m$, $n \times n$, $m \times n$ 阶复矩阵, $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 可对角化, 求证: 矩阵方程 $AX - XB = C$ 必有解.

评注 学习指导书 [2] 的例 6.45 是在相同的假设下证明 A, B 均可对角化, 而这道试题自然地延伸为证明对应的矩阵方程有解.

6.2、坚持自主创新命题及六种命题方法

方法三：适当推广

将教材习题的条件适当地弱化或一般化，从而得到原结论的推广。

例 9 (2015 级高等代数 II 期末考试第六大题) 设 n 阶复方阵 A 的特征多项式为 $f(\lambda)$, 复系数多项式 $g(\lambda)$ 满足 $(f(g(\lambda)), g'(\lambda)) = 1$, 证明: 存在 n 阶复方阵 B , 使得 $g(B) = A$.

评注 学习指导书 [2] 的例 7.44 是上述试题的特例, 其中 $g(\lambda) = \lambda^m$.

6.2、坚持自主创新命题及六种命题方法

方法三：适当推广

将教材习题的条件适当地弱化或一般化，从而得到原结论的推广。

例 10 (2015 级高等代数 II 思考题第 16 题) (1) 设 A 为 n 阶正定实对称阵, 证明: 对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$, 成立 $0 \leq x'(A + xx')^{-1}x < 1$; 进一步, 对任意的 $B \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$, 成立 $0 \leq |B'(A + BB')^{-1}B| < 1$;

(2) 设 A 为 n 阶半正定实对称阵, 证明: 存在 $x \in \mathbb{R}^n$, 使得 $A + xx'$ 正定且 $x'(A + xx')^{-1}x = 1$ 的充要条件是 $r(A) = n - 1$; 进一步, 存在 $B \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ ($m \leq n$), 使得 $A + BB'$ 正定且 $|B'(A + BB')^{-1}B| = 1$ 的充要条件是 $r(A) = n - m$.

评注 上述试题 (1) 的前半部分是一道考研试题, 而后半部分是其高阶推广; 进一步, (2) 是 (1) 的一个有益的补充.

6.2、坚持自主创新命题及六种命题方法

方法四：逆向思维

将教材习题的条件和结论对换位置，按照逆向思维进行命题。

例 11 (2013 级高等代数 I 期末考试第七大题) 设 A 为数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶非异阵, 证明: 对任意的对角阵 $B \in M_n(\mathbb{K})$, $A^{-1}BA$ 均为对角阵的充分必要条件是 $A = P_1 P_2 \cdots P_r$, 其中 P_i 均为第一类初等阵 (即对换 I_n 的某两行) 或第二类初等阵 (即非零常数乘以 I_n 的某一行).

评注 由第一类初等阵或第二类初等阵诱导的相似变换将对角阵变为对角阵, 这是一个显然的事实 (即上述试题的充分性), 但这一事实的逆向思维 (即上述试题的必要性) 却并不是一个平凡的命题.

6.2、坚持自主创新命题及六种命题方法

方法四：逆向思维

将教材习题的条件和结论对换位置，按照逆向思维进行命题。

例 13 (2013 级高等代数 II 每周一题第 5 题) 设 A, B 分别是 4×3 和 3×4 阶实矩阵, 满足

$$BA = \begin{pmatrix} -9 & -20 & -35 \\ 2 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}, AB = \begin{pmatrix} 9a - 14 & 0 & 9a - 15 & 18a - 32 \\ 6a + 2b - 9 & 1 & 6a + 3b - 9 & 12a + 4b - 19 \\ -2a + 2 & 0 & -2a + 3 & -4a + 4 \\ -3a + 6 & 0 & -3a + 6 & -6a + 14 \end{pmatrix},$$

试求参数 a, b 的值.

评注 第三届全国大学生数学竞赛决赛中的一道高等代数试题是: 设 A, B 分别为 3×2 和 2×3 阶实矩阵, 已知 AB , 求 BA , 而上述试题却是它的逆向命题.

6.2、坚持自主创新命题及六种命题方法

方法五：直接应用

将考题设计为重要理论、定理、方法、技巧和某些习题的直接应用。

例 16 (2015 级高等代数 II 思考题第 4 题) 设 n 阶方阵 A 适合多项式 $f(x) = a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1x + a_0$, 其中 $|a_m| > \sum_{i=0}^{m-1} |a_i|$. 证明: 矩阵方程 $2X + AX = XA^2$ 只有零解.

评注 教材 [1] 复习题七的第 26 题告诉我们: 若方阵 A, B 没有公共的特征值, 则矩阵方程 $AX = XB$ 只有零解. 上述试题就是这一教材习题的直接应用. 另外, 第七届全国大学生数学竞赛预赛中的一道高等代数试题也是这一习题的直接应用, 它的更多应用可以参考学习指导书 [2] 的例 6.64–例 6.66.

6.2、坚持自主创新命题及六种命题方法

方法五：直接应用

将考题设计为重要理论、定理、方法、技巧和某些习题的直接应用。

例 20 (2011 级高等代数 II 期末考试第八大题) 设 V 为 n 维酉空间, φ, ψ 为 V 上的正规算子, 它们都满足不同特征值的模长互不相同. 证明: $\|\varphi(v)\| = \|\psi(v)\|$ 对任意的 $v \in V$ 成立的充分必要条件是存在谱分解: $\varphi = \lambda_1 E_1 + \cdots + \lambda_k E_k$, $\psi = \mu_1 E_1 + \cdots + \mu_k E_k$, 其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k, \mu_1, \cdots, \mu_k$ 分别是 φ, ψ 的全体不同特征值, E_i 是对应的正交投影算子, 并且 $|\lambda_i| = |\mu_i|, 1 \leq i \leq k$.

评注 若内积空间之间的线性映射 φ 保持范数, 则一定保持内积, 这是高等代数中的一个定理, 其证明方法是内积写成范数的表达式. 利用相同的证明方法可以把上述试题中范数的条件转化成内积的条件, 然后直接利用复正规算子谱分解的唯一性即可证明结论.

6.2、坚持自主创新命题及六种命题方法

方法六：一题多解

命题时注重考题的一题多解性，激发学生的思维活力和创新潜力。

例 18 (2013 级高等代数 II 期末考试第七大题) 设 A 为 n 阶半正定实对称阵, B 为 n 阶实对称阵且满足 $AB + BA = 0$, 证明: 存在 n 阶正交阵 P , 使得

$$P'AP = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0\}, \quad P'BP = \text{diag}\{0, \dots, 0, \mu_{r+1}, \dots, \mu_n\}.$$

13级学生在期末考试时共给出了四种证法, 分别是 (1) 实对称阵的正交相似标准型, (2) 不变子空间, (3) 实反对称阵的正交相似标准型, (4) 半正定阵的算术平方根。

6.2、坚持自主创新命题及六种命题方法

方法六：一题多解

命题时注重考题的一题多解性，激发学生的思维活力和创新潜力。

复旦大学2017--2018学年第一学期（17级）高等代数I期末考试第七大题解答

七、(本题10分) 设 U, V, W 均为数域 K 上的非零线性空间, $\varphi: V \rightarrow U$ 和 $\psi: U \rightarrow W$ 是线性映射, 满足 $r(\psi\varphi) = r(\varphi)$. 证明: 存在线性映射 $\xi: W \rightarrow U$, 使得 $\xi\psi\varphi = \varphi$.

17级学生在期末考试时共给出了五种证法（其中有44人完全做对），前面两种是几何证法，后面三种是代数证法。

6.3、坚持发布期末压轴大题解答和情况分析

复旦大学2017~2018学年第二学期高等代数Ⅱ期末考试情况分析

一、期末考试使用题纲十名

张世道(95)、刘丰其(95)、戴一鸣(93)、郭宇城(92)、程祥祺(91)、葛建伟(90)、汪子仙(90)、余俊伟(90)、张星昊(89)、朱柏青(89)

二、总成绩计算方法

平时成绩指提交作业的次数决定,本学期提交作业14次,10次以上(包括10次)100分,少一次扣10分。

总成绩=平时成绩 $\times$ 15%+期中考试成绩 $\times$ 15%+期末考试成绩 $\times$ 70%

三、最终成绩及人数

最终成绩	人数
A	29
A+	2
B+	22
B	13
B-	11
C+	8
C	4
C-	3
D	2
F	8
缺考	1
合计	103

四、期末卷面成绩及人数

卷面成绩	人数
90分~100分	8
80分~89分	24
70分~79分	28
60分~69分	15
50分~59分	10
40分~49分	9
40分以下	8
缺考	1
合计	103

五、试卷命题分析

本次期末试卷的第一大题为8道选择题,主要考察学生对基本概念的理解以及对课后作业和复习题中常见结论的熟悉程度。第二大题为8道填空题,它们与第三、四、五大题同为计算题,覆盖了整个高等代数中所有重要的计算方法和技巧,这些也是后续专业课程(如常微分方程、泛函分析、数值计算和微分几何等)所要求掌握的计算基本功。第六、七、八大题为证明题,主要涉及Jordan标准型、正交矩阵和实对称矩阵的正交相似标准型等重要理论和方法的相关运用。遵循高等代数的教学目标,试卷的前六大题共计80分,着重考察学生对基本概念的理解、基本计算的掌握以及证明推导能力的养成,最后两道较难的证明题,让优秀的学生尽情发挥,使卷面成绩出现必要的梯度。学生的卷面成绩说明本试卷难易适度中,设计合理,富有层次,具有较好的区分度。

六、学生成绩分析

从期末考试的卷面成绩来看,整个班级的平均分为67.8分;80分以上的同学占了31%;60分以上的同学占了75%。最终的卷面成绩也与卷面成绩保持相同比例,A类与B类的学生共占了76%。应该说数学学院本科17级同学在本学期末考试中取得了较为满意的成绩。

七、教学效果分析

数学学院本科17级同学圆满完成了本学期高等代数Ⅱ的教学目标,在基本概念的理解、基本计算的掌握以及重要定理、方法和技巧的应用方面打下了扎实的基础。下面我们依次对最后三道证明题进行分析,探讨在教学方面的得与失。

⑩第六大题(解答请参考<https://www.cnblogs.com/torsor/p/9284947.html>)

本题着重考察学生对Jordan标准型理论的运用(典型的三段论法),共有59名同学做出了此题(得分在9分及以上),名单如下:

曾世雄、张祥道、刘丰其、阮光宇、孙亚斌、何宇翔、南诚、张世道、张世恒、吴恩强、陈城、郭宇城、许智强、徐嘉华、彭树德、成然、史书恒、林妙可言、尉天字、梁汉、张逸伦、戴逸闻、崔镇涛、朱静静、高正浩、张君恒、余俊伟、戴一鸣、王翔元、林锦峰、刘星瑞、蔡羽翔、王成文健、戴逸闻、林成祥、尹丽彬、葛建伟、张星昊、朱柏青、张雷、汪子仙、刘俊强、王炳进、王恩强、方博越、李俊博、张俊毅、何强、王恩强、林锦峰、陈川祥、尚振航、陈恩强、尉天字、李倩、张嘉骏、周子恒、李俊康、程祥祺

不足之处:绝大部分同学知道如何利用Jordan标准型理论进行讨论,但仍有十几个同学在证明本题时没有任何的想法,纯粹只是乱猜。

⑪第七大题(解答请参考<https://www.cnblogs.com/torsor/p/9284936.html>)

本题着重考察学生对正交矩阵和实对称矩阵的正交相似标准型理论的运用,特别推广了所谓的“同时合同对角化”的技巧。共有21名同学做出了此题(得分在9分及以上),名单如下:

张世道、刘丰其、南诚、陈城、郭宇城、许智强、文豪、史书恒、戴逸闻、张君恒、余俊伟、戴一鸣、王成文健、张星昊、朱柏青、汪子仙、王炳进、王恩强、张嘉骏、程祥祺

不足之处:80%的同学都没有想到需要运用“可对角化矩阵的交换性可以诱导同时合同化”这一技巧。

⑫第八大题(解答请参考<https://www.cnblogs.com/torsor/p/9284893.html>)

本题着重考察学生利用标准型理论对矩阵问题进行化简的能力。由于相同类型的习题在复旦高等代数教材或现代代变书的第六章和第七章反复出现,所以这个压轴题被东征老师评价为近五年最难上手的压轴题。即便如此,本题的第一部分(不等式的证明)也只有13名同学做出(得分在9分及以上),本题的第二部分(等号成立的充要条件的证明)没有同学做出,名单如下:

张世道、刘丰其、南诚、郭宇城、史书恒、林妙可言、戴一鸣、张星昊、朱柏青、汪子仙、王恩强、方博越、陈川祥

不足之处:希望17级的拔尖同学今后在攻克难题方面要更加努力,以更高的标准要求自己。

八、对17级同学的期待与寄语

(1) 年级学风建设永远在路上。这个学期,我对17级的学习氛围其实并不满意。例如,我精心推出的每周一题,提交解答的同学寥寥无几,甚至连看一眼题目的同学都很少(因为博客的点击数即使到了期末才只有1000次,同时期16级博客的点击数超过了2000次)。又例如,班上一直有7~8位同学,学习极其不认真(据说一直在寝室打游戏),平时不做作业,期中、期末考试卷面成绩都在40分以下。我认为只有把良好学风的建设始终放在首位,全年级同学的学习态势才会不断地向上发展。殷切期望所有的17级同学都要努力营造良好的学习氛围,为本年级的学风建设付诸行动,做出贡献。

(2) 数学学习不是快乐学习,一分耕耘一分收获。本学期的期中考试题目偏难,成绩不太理想。有学生家长向辅导员反馈:她们送孩子来复旦数院,是为了让孩子快乐学习的,出这么难的题目,严重打击了孩子的自信心。其实我想说的是,数学学习从来就不是快乐学习,就算课堂认真听讲,课后如果不通过自己的思考把所学内容进行深入地理解,不通过做作业反复熟练相关的计算方法和证明技巧,最终都不可能学好数学。如果还想考试得高分,则必须多花时间看参考书和刷题。只有经历过苦寒,梅花才能绽放出芬芳;只有经历过痛苦的学习过程,才能在数学上有所收获。

九、对数学学院基础课教学的建议

(1) 在重视拔尖学生培养的同时,更要重视中等水平以及基础较差学生的培养。年级优良学风的养成关键在于大一,基础课教学团队应该与数学学院学工组、志德书院新生导师团队加强交流、密切配合,更加关注中等及偏下学生在基础课学习中遇到的困难,在学习方法上给予他们更多的建议和指导。

(2) 切实采取措施,努力提高习题课的教学质量。由于习题课实施小班教学,故十多年来一直都是新进教师或博士后给学生上习题课。习题课在基础课教学环节中占有重要的地位,但习题课任课老师的变动过于频繁,教学效果参差不齐,已成为提高基础课教学质量的瓶颈。

十、前十年的总结与后十年的展望

(1) 今年是我国复旦任教的第十个年头,上了十年基础课高等代数,教了数学学院08~17级整整十届本科生,付出了很多,收获也很多。高等代数教材第三版,高等代数学习方法指导书(白皮书)第三版,高等代数博客和每周题,高等代数在线课程等等,这些都是岁月的印记、汗水的结晶。当我开设高等代数微信群被某些老师诋毁另有所图,当我只拿到上海市教学成果二等奖,我也灰心过、难过过、失落过。所幸在这十年里,我教出了那么多优秀的本科生并和他们成为好朋友,我发现自己始终热爱教师这个职业,并愿意一直走下去。

(2) 未来的十年,我还会继续坚持基础课高等代数的教学工作,力争培养出更多具有扎实数学功底的本科学,同时也致力于利用在线课程这一模式,努力提升非数学专业本科生的数学素养和高等代数水平。不忘初心、牢记使命,前路漫漫、唯有坚持!

七、教学研究

- ① 从2012年至今，在《大学数学》和《高等数学研究》杂志上正式发表教学研究论文14篇（第一作者），内容涉及课堂教学和考试命题等方面。
- ② 在数学教育方面，撰写了文章《如何学好高等代数》和《数学之美与新生寄语》等，被网络媒体多次转载。

7.1、教学论文、教育文章

课堂教学

- [1] 秩在矩阵相似中的应用, **高等数学研究**, 2012.
- [2] 从一个初等问题看高等代数中的若干技巧, **高等数学研究**, 2013.
- [3] 文字行列式求值中的两个技巧, **大学数学**, 2013.
- [4] 从两道习题看矩阵可对角化的判定, **高等数学研究**, 2014.
- [5] 利用多项式的技巧替代摄动法, **大学数学**, 2014.
- [6] 线性变换的特征多项式诱导的直和分解, **高等数学研究**, 2015.
- [7] 从 AB 与 BA 谈高等代数的教学串联, **高等数学研究**, 2015.
- [8] 高等代数中若干概念在基域扩张下的不变性, **大学数学**, 2015.
- [9] 从一道习题的推广看矩阵的标准形理论, **高等数学研究**, 2016.
- [10] 循环子空间的若干应用, **大学数学**, 2016.
- [11] Galois 理论在高等代数中的若干应用, **大学数学**, 2016.
- [12] 循环子空间的进一步应用, **大学数学**, 2017.

7.1、教学论文、教育文章

考试命题

- [1] 浅谈高等代数命题中的若干技巧, **大学数学**, 2013.
- [2] 一道高等代数考题的命题思路及分析, **大学数学**, 2015.

数学教育

- [1] 如何学好高等代数.
- [2] 数学之美与新生寄语, 看看新闻网, 2016-8-16.

7.2、教学论文：从AB与BA谈高等代数的教学串联

已知结论

定理 1 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times m$ 矩阵, 其中 $m \geq n$, 则

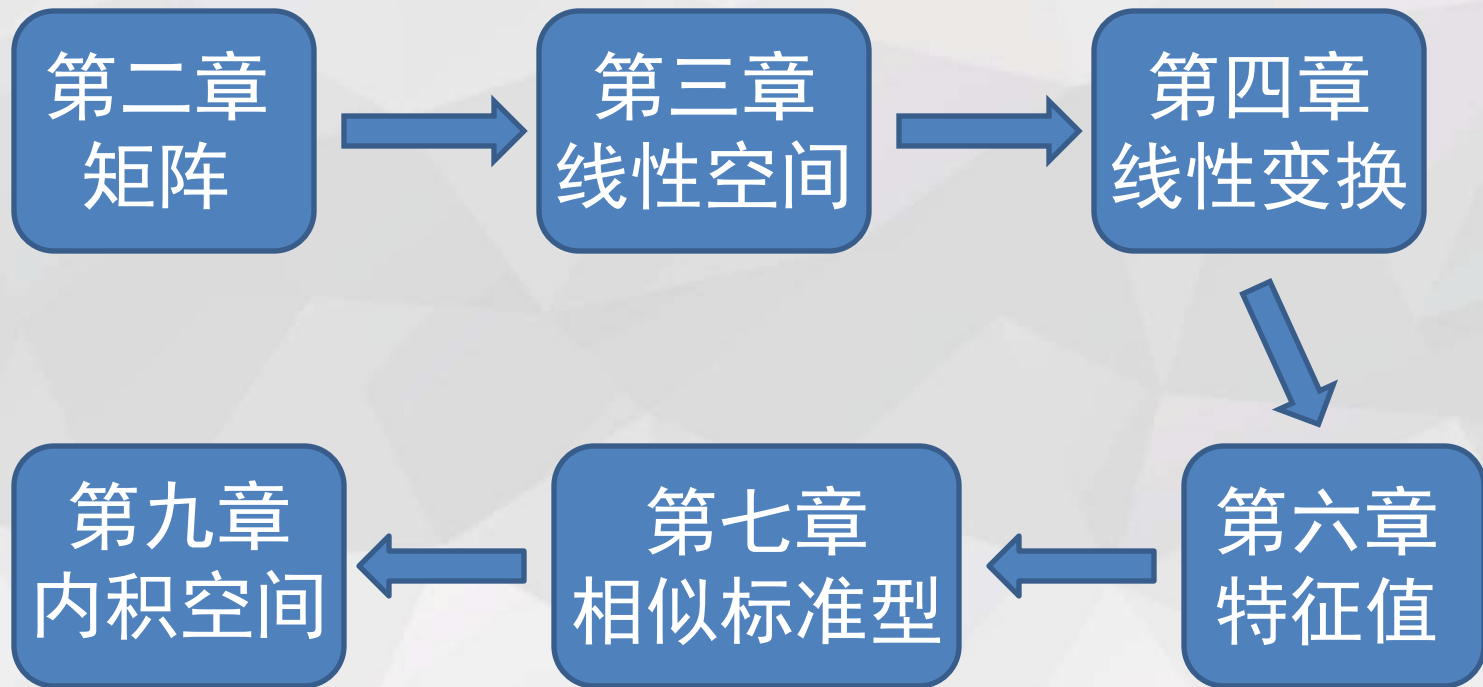
(1) $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, 即 AB 与 BA 有相同的迹;

(2) $|\lambda I_m - AB| = \lambda^{m-n} |\lambda I_n - BA|$, 即 AB 的特征值比 BA 的特征值多 $m - n$ 个 0. 特别地, 若 $m = n$, 则 AB 与 BA 有相同的特征值.

基本关系

$$(AB)^{k+1} = A(BA)^k B, \quad (BA)^{k+1} = B(AB)^k A, \quad \forall k \in \mathbb{N}^+.$$

7.2、教学论文：从AB与BA谈高等代数的教学串联



八、教学效果

- ① 教材《高等代数学》被评为十五、十一五和十二五国家级规划教材，现被清华大学数学学院和物理系，复旦大学技术科学实验班，赣南师范大学数学与计算机科学学院等高校作为教材使用。
- ② 复旦大学高等代数课程荣获2011年度上海市精品课程。
- ③ 教学成果项目“高等代数课程教学改革与创新与实践”荣获2017年上海市教学成果二等奖。
- ④ 复旦大学高等代数在线课程目前有来自全国各地500多所高校的超过15000人参与在线学习。
- ⑤ 高等代数课程的改革创新和教学实践帮助复旦大学数学学院在历届全国大学生数学竞赛中取得优异的成绩。

8.1、复旦大学历届全国大学生数学竞赛成绩

前九届上海赛区预赛共评出数学类一等奖156人，其中复旦学生130人，占83.3%；复旦在前九届全国决赛中也表现优异，共有22人次获得数学类一等奖，其中7人获得全国个人前三名。

复旦获奖人数	上海赛区 一等奖	全国决赛 一等奖	全国决赛 二等奖	全国决赛 三等奖
2009 年度 第一届	6/7	1 (个人第 1 名)	2	3
2010 年度 第二届	10/13	2 (个人第 2 名)	3	0
2011 年度 第三届	13/15	2 (个人第 4 名)	2	1
2012 年度 第四届	14/15	2	1	2
2013 年度 第五届	21/22	2(高年级组个人 第 2 名和高年级 组个人第 4 名)	3	0
2014 年度 第六届	18/23	3(高年级组个人 第 1 名和高年级 组个人第 2 名)	1	0
2015 年度 第七届	17/17	3(低年级组个人 第 3 名和低年级 组个人第 5 名)	1	0
2016 年度 第八届	15/21	2(低年级组个人 第 5 名)	1	0
2017 年度 第九届	16/23	5(低年级组个人 第 1 名和高年级 组个人第 5 名)	2	0

❖ 九、将来目标：不断探索、不断实践、不断提高

实事求是。理论联系实际。

——毛泽东

以知促行，以行促知，知行合一。

——习近平